Lancio del Pi greco

A cura di exploratorium

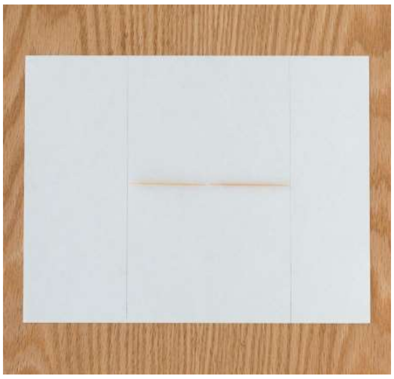
Se ti chiedessimo di trovare una stima di π probabilmente faresti quello che fecero anche gli antichi Greci: dividere la lunghezza di una circonferenza per il proprio diametro.
Qui puoi stimare Pi greco utilizzando un metodo un po' meno convenzionale: il lancio casuale di stuzzicadenti!

1. Strumenti e materiali

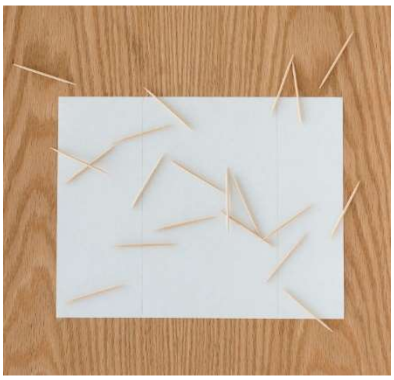
Ti serviranno:

- **Foglio di carta**
- **Righello**
- **Matita**
- **Stuzzicadenti**
- Opzionale: **compasso**, **foglio quadrettato**

2. Cosa fare e osservare



Disegna **due linee parallele** sul foglio di carta. Assicurati che la distanza tra questi due tratti sia pari al doppio della lunghezza (**L**) degli stuzzicadenti.



Ora **lascia cadere gli stuzzicadenti**, uno dopo l'altro, sul foglio di carta, nel modo più casuale possibile.
(Segui il link https://www.exploratorium.edu/snacks/pi-toss per una simulazione dell'esperimento)

Prendi nota del numero di stuzzicadenti che hai lanciato sul foglio e di quelli fra questi che, una volta caduti, hanno intersecato le linee che hai disegnato. Non tener conto degli stuzzicadenti caduti al di fuori del foglio di carta.

Lancio del Pi greco

A cura di exploratorium

L'approssimazione di π che risulta dal tuo esperimento è pari al rapporto tra il numero di stuzzicadenti che hai lanciato e il numero di stuzzicadenti che hanno intersecato le linee.
Il numero che hai trovato si avvicina a 3,14…?

3. Cos'è successo?

A seconda di quanti stuzzicadenti che hai lanciato la tua approssimazione potrebbe risultare più o meno vicina al numero che conosciamo. Questo perché il metodo che stiamo utilizzando **migliora la sua accuratezza all'aumentare delle prove** che si svolgono (lanci di stuzzicadenti), quindi più avrai pazienza di svolgere questa operazione migliore sarà il risultato. Potresti anche svolgere molte volte questo esperimento e poi fare una media dei risultati che hai ottenuti: la stima di π sarà ancora più precisa!

Questo sorprendente metodo per calcolare **π**, noto con il nome di ***problema dell'ago di Buffon***, fu per la prima volta utilizzato nel XVIII secolo dal naturalista francese Georges-Louis Leclerc conte di Buffon. Il conte venne ispirato da un gioco d'azzardo in voga all'epoca che prevedeva di scommettere, lanciando una moneta, sul fatto che essa cadesse interamente all'interno di una mattonella del pavimento.
Questo metodo comunque funziona su qualsiasi superficie tassellata (anche i pavimenti in liste di legno) purché la distanza tra le linee parallele del pavimento sia maggiore della lunghezza degli stuzzicadenti utilizzati.
Una formulazione generale dell'approssimazione è data dalla seguente:

$$\pi = 2 * \frac{lunghezza\ stuzzicadenti}{distanza\ tra\ le\ due\ linee} * \frac{numero\ tot\ di\ stuzzicadenti\ lanciati}{numero\ tot\ di\ stuzzicadenti\ che\ intersecano\ le\ linee}$$

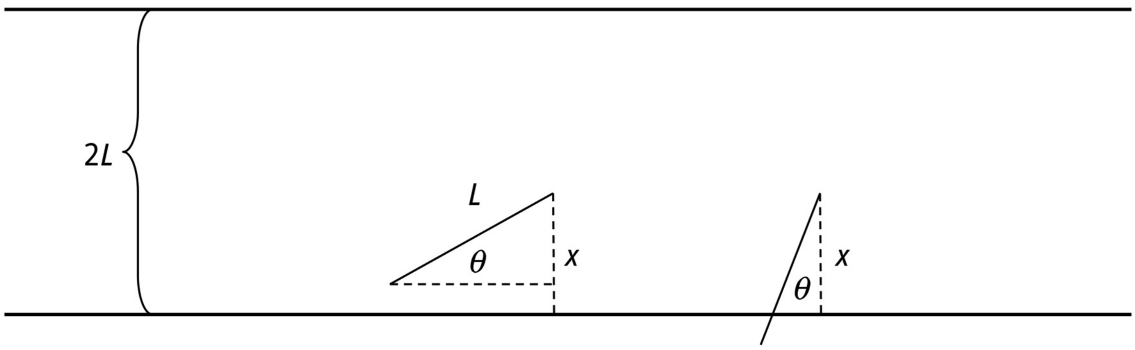
Ossia, dando dei nomi alle variabili in gioco e tenendo conto che nel nostro esperimento la distanza tra le due linee era pari al doppio della lunghezza di uno stuzzicadenti, otteniamo:

$$\pi = 2 * \frac{L}{2L} * \frac{n_{tot}}{n_{inters}} = \frac{n_{tot}}{n_{inters}}$$

La dimostrazione di questo risultato richiede un certo quantitativo di passaggi matematici che farebbero la gioia di chi è appassionato. Riportiamo dunque il ragionamento nel paragrafo qui sotto.
Questo ragionamento geometrico risulta un perfetto esempio di un procedimento computazionale noto con il nome di ***Metodo di Montecarlo***, dove **un campionamento casuale di un sistema conduce ad una soluzione approssimata**.

4. Approfondimento matematico

Proviamo a descrivere la situazione graficamente. La posizione di ogni stuzzicadenti può essere descritta mediante due coordinate: **x**, la distanza del vertice più lontano dello stuzzicadenti dalla linea tracciata e **θ**, l'angolo tra lo stuzzicadenti e la linea tracciata.



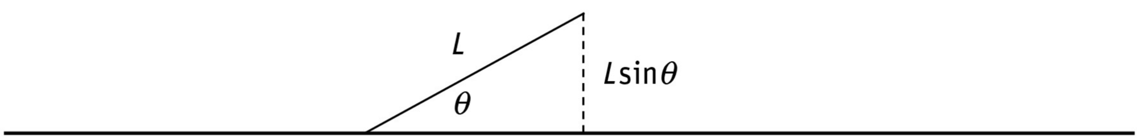
Per come abbiamo costruito il problema possiamo considerare valori di x e di θ come appartenenti ai seguenti range:

$$x \in \{0, \dots 2L\} \qquad \text{e} \qquad \theta \in \left\{0, \dots \frac{\pi}{2}\right\}$$

Osserviamo inoltre che **in tutti i casi in cui lo stuzzicadenti interseca una linea** avremo che:

$$x < L \sin \theta$$

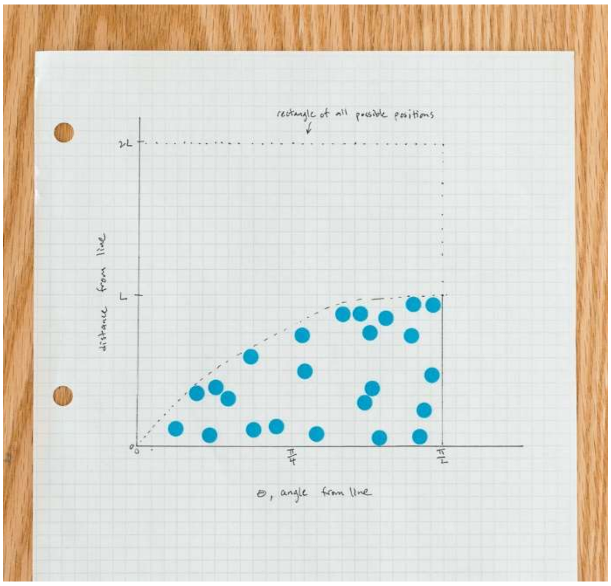
Il perché lo si evince osservando il seguente schema e ricordando i teoremi della trigonometria:



Possiamo quindi prendere nota dei valori che otteniamo misurando pazientemente la posizione di ogni stuzzicadenti lanciato con righello e goniometro e rappresentarli in un grafico come quello in figura.

Lancio del Pi greco

A cura di



Sulle **ascisse** segniamo **il valore di θ** misurato in radianti e sulle **ordinate** vi è la coordinata che abbiamo precedentemente chiamato **x**.
Più punti aggiungi a questo grafico e più chiaro sarà lo schema risultante.

Uno stuzzicadenti che interseca la linea tracciata sarà rappresentato da un puntino nell'area sottostante alla funzione:

$$f(\theta) = \mathrm{L}\sin(\theta),$$

nell'intervallo precedentemente specificato. Inoltre osserviamo che tutti i casi possibili (tutti gli stuzzicadenti lanciati) saranno rappresentati da un puntino che per forza di cose dovrà appartenere all'area del rettangolo:

$$\frac{\pi}{2} \times 2L$$

A livello probabilistico possiamo **calcolare la probabilità di uno stuzzicadenti di intersecare le linee tracciate** facendo in qualche modo il rapporto tra "i casi favorevoli (stuzzicadenti intersecanti la linea)" e i "casi possibili". Questo, nei metodi di Montecarlo, si traduce nel calcolo del rapporto tra le due aree del grafico:

$$\frac{soluzioni\ che\ intersecano\ la\ linea}{tutte\ le\ possibili\ soluzioni} = \frac{\int_0^{\pi/2} Lsin(\theta)\,d\theta}{2L\frac{\pi}{2}} = \frac{-Lcos(\theta)|_0^{\pi/2}}{L\pi} = \frac{-L[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0)]}{L\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Ecco perché calcolando la probabilità che uno stuzzicadenti intersechi le linee che abbiamo tracciato otteniamo una stima di π.

Lancio del Pi greco

A cura di exploratorium

5. Link utili

- Il Science Snack che hai appena provato è un'idea dell'**Exploratorium** di **San Francisco** (California, USA), dei veri esperti nel costruire esperimenti. Lo puoi trovare qui: https://www.exploratorium.edu/snacks/pi-toss
  Dai un'occhiata alle centinaia di esperimenti che propongono, sono davvero divertenti! (e così potrai anche ripassare un po' di inglese).
- Un interessante intervento relativo ai metodi di Montecarlo tenuto dal prof. **Leonardo Colletti** della Libera Università di Bolzano, alla Notte Nazionale del Liceo Classico a Bolzano (Liceo Carducci, BZ): https://www.youtube.com/watch?v=tGhF9WSoYhI